Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 13 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(3+2+1+1 Punkte)* Im Folgenden sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Beweise für eine beliebige Menge $A \subset X$ die Darstellung

$$\partial A = \{x \in X \,|\, \forall\, \varepsilon > 0 \;:\; (B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset) \;\wedge\; (B(x,\varepsilon) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset)\}.$$

(b) Folgere aus Aufgabenteil (a) die Implikation

$$A \subset X \text{ ist offen und abgeschlossen.} \qquad \Longrightarrow \qquad \partial A = \emptyset.$$

(c) Sei $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Zeige: $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(d) Sei $(X, d) = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Zeige, dass die Teilmenge

$$I_\alpha := \{x \in \mathbb{Q} \;:\; |x| < \alpha\} \subset \mathbb{Q}$$

keinen Rand in $\mathbb{Q}$ hat, d.h. $\partial I_\alpha = \emptyset$.

Lösung. (a): Sei zuerst $x \in \overline{A}$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A mit $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. Insbesondere existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \varepsilon$, also $x_n \in A \cap B(x,\varepsilon)$. Falls umgekehrt für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, setzen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $\varepsilon \equiv \varepsilon_n = 1/n$ und wählen $x_n \in A \cap B(x, 1/n)$. Die resultierende Folge liegt in A und konvergiert gegen x, also $x \in \overline{A}$.

Nun charakterisieren wir $x \notin A^\circ$. Falls $x \notin A^\circ$, dann kann für keinen Ball $B(x,\varepsilon)$ die Relation $B(x,\varepsilon) \subset A$ gelten, also folgt immer $B(x,\varepsilon) \cap (X\backslash A) \neq \emptyset$. Falls aber jeder Ball das Komplement von A schneidet, ist x auch kein innerer Punkt von A.

Zusammen folgt

$$\begin{aligned} x \in \partial A \;&\Longleftrightarrow\; x \in \overline{A} \quad\wedge\quad x \notin A^\circ \\ &\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt :} \quad (B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset) \;\wedge\; (B(x,\varepsilon) \cap (X\backslash A) \neq \emptyset). \end{aligned}$$

(b): Angenommen $A \subset X$ ist offen und abgeschlossen, dann ist auch $X\backslash A$ offen und abgeschlossen. Aus der Darstellung aus Aufgabenteil (a) folgt mittels $X\backslash(X\backslash A) = A$, dass $\partial A = \partial(X\backslash A)$. Wegen $\partial A \subset \overline{A}$ gilt damit $\partial A \subset A$ und $\partial A = \partial(X\backslash A) \subset X\backslash A$, also $\partial A \subset A \cap X\backslash A = \emptyset$.

(c): Sei $x \in \mathbb{R}$ eine *rationale* Zahl. Dann existiert sowohl eine Folge rationaler Zahlen wie eine Folge irrationaler Zahlen (z.B. $x + \pi/n$ für $n \in \mathbb{N}$), welche gegen x konvergiert. Nach Aufgabenteil (a) ist also $x \in \partial\mathbb{Q}$. Nun sei $x \in \mathbb{R}$ *irrational*. Nach der Konstruktion von $\mathbb{R}$

existiert eine Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert, und dieselbe Folge irrationaler Zahlen wie oben konvergiert ebenfalls für $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, also folgt auch hier $x \in \partial\mathbb{Q}$.

(d): Als offenes Intervall ist I_α offen in $\mathbb{Q}$ und ferner ist auch das Komplement von I_α offen, da $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Insbesondere ist I_α offen und abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ und nach Aufgabenteil (b) ist somit $\partial I_\alpha = \emptyset$. ■

Aufgabe 2: *(3 Punkte)* Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert $x \in X$. Wir definieren die Mengen

$$K := \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \qquad \text{und} \qquad L := \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweise, dass K kompakt ist und L nicht zwingend kompakt sein muss.

Lösung. Sei J eine Indexmenge und $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ eine offene Überdeckung von K, d.h. für alle $j \in J$ ist U_j eine offene Menge und

$$K \subset \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Für jedes $a \in K$ existiert also ein $j \in J$, sodass $a \in U_j$. Insbesondere gibt es also zu jedem $x_n \in K$ ein $j_n \in J$, so dass $x_n \in U_{j_n}$ und ein $j_* \in J$, so dass $x \in U_{j_*}$. Da U_{j_*} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U_{j*}$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, existiert ein $N \equiv N(\varepsilon)$, sodass $x_n \in B(x, \varepsilon)$ für alle $n \geq N$ und somit $x_n \in U_{j_*}$. Daher ist

$$K \subset U_{j*} \cup \bigcup_{1\leq n<N} U_{j_n}$$

und $\{U_{j_*}\} \cup \{U_{j_n} \mid 1 \leq n < N\}$ ist eine *endliche* offene Überdeckung von K.

Betrachte $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $x_n = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $U_1 = (1/2, 2)$ und

$$U_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \qquad \text{für } n \geq 2,$$

so gilt $x_n \in U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_k \notin U_n$ für $n \neq k$. Also ist $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung vom M. Aber jedes U_n enthält genau ein x_n und daher kann es keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ geben. ■